Calcul de la position du bateau : un problème mathématique

Pierre-André Chevalier
professeur à la Haute Ecole technique et informatique de Bienne
Haute Ecole Spécialisée du Canton de Berne

Le problème évoqué dans le texte précédent se résume à une situation géométrique simple : connaissant les distances r_1, r_2 et r_3 entre un point $P(X,Y)$ et trois points donnés $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ et $P_3(x_3,y_3)$ dans le plan, peut-on calculer la position du point P ?

La manière la plus simple de résoudre ce problème est graphique. Le point P étant situé à la distance r_1 du point P_1, il doit se trouver sur le cercle de centre P_1 et de rayon r_1. De manière analogue, P doit aussi se trouver sur le cercle de centre P_2 et de rayon r_2, ainsi que sur le cercle de centre P_3 et de rayon r_3. Le point d'intersection des trois cercles fournit le point P (Fig. 1).

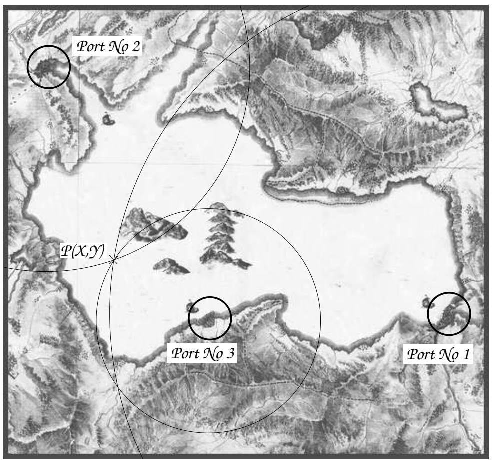

FIG. 1 : Point d'intersection de trois cercles.

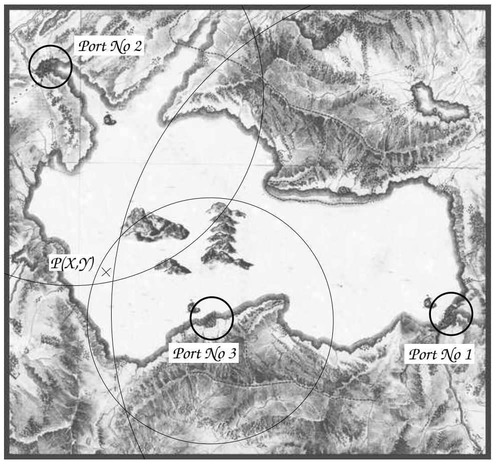

FIG. 2 : Les trois cercles ne se coupent pas au même point.

Malheureusement, cette construction n'est possible que si les distances – c'est-à-dire les rayons des cercles – sont mesurées de manière absolument exacte. Dans le problème évoqué ci-dessus, les trois distances sont calculées à partir des temps de parcours du son des canons. Il faut donc prendre en compte des erreurs dans les mesures de ces temps de parcours. De plus, il faut admettre que l'horloge du bateau, étant souvent secouée, n'est pas exactement synchronisée avec les trois horloges des ports. Dans ces conditions, les trois cercles ne se coupent pas en un point unique. Le point P ne peut donc pas être déterminé de manière exacte, mais on «devine» qu'il doit se trouver quelque part dans la région où les trois cercles sont très proches l'un de l'autre (Fig. 2).

Nous allons maintenant décrire une méthode mathématique qui permet de résoudre ce problème. Commençons par définir quelques grandeurs significatives :

- v_s : vitesse moyenne du son dans l'air (0.340 km/s) ;
- t_1 : temps de parcours du son du 1er canon entre le port et le bateau, selon les calculs effectués sur le bateau (126 secondes) ;
- t_2 : temps de parcours du son du 2ème canon (157 secondes) ;
- t_3 : temps de parcours du son du 3ème canon (173 secondes) ;
- T : erreur de synchronisation de l'horloge du bateau par rapport aux horloges terrestres.

Au moyen de ces notations, la distance r_1 entre le bateau et le port No 1 peut s'exprimer de deux manières. D'une part, cette distance correspond à la distance euclidienne entre $P(X,Y)$ et $P_1(x_1,y_1)$:

$$r_1 = \sqrt{(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2} \tag{1}$$

D'autre part, on sait que la distance r_1 a été parcourue par le son du canon No 1. Ce son s'est propagé dans l'air à la vitesse v_s durant le temps $t_1 + T$ (temps calculé + erreur de synchronisation). On peut donc exprimer r_1 sous la forme

$$r_1 = v_s \cdot (t_1 + T). \tag{2}$$

En soustrayant (1) et (2), on obtient l'équation

$$\sqrt{(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2} - v_s \cdot (t_1 + T) = 0. \tag{3}$$

Si l'on introduit la fonction $f_1(X,Y,T) = \sqrt{(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2} - v_s \cdot (t_1 + T)$, on peut se convaincre que les coordonnées (X,Y) de la position exacte du bateau et l'erreur d'horloge T font partie de l'ensemble des solutions de l'équation

$$f_1(X,Y,T) = 0. \tag{4}$$

Opérant de manière analogue avec les deux autres ports No 2 et No 3, on peut conclure que les trois nombres cherchés X, Y et T doivent aussi faire partie de l'ensemble des solutions des équations $f_2(X,Y,T) = 0$ et $f_3(X,Y,T) = 0$, avec

$$f_2(X,Y,T) = \sqrt{(X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2} - v_s \cdot (t_2 + T),$$

$$f_3(X,Y,T) = \sqrt{(X - x_3)^2 + (Y - y_3)^2} - v_s \cdot (t_3 + T).$$

Ainsi posé, le problème consiste à résoudre un système de trois équations non linéaires à trois inconnues, qui peut être formulé sous la forme vectorielle

$$\vec{f}(X,Y,T) = \begin{pmatrix} f_1(X,Y,T) \\ f_2(X,Y,T) \\ f_3(X,Y,T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

La résolution de cette équation s'effectue par linéarisation. Nous ne donnerons pas ici le détail des calculs, mais uniquement l'idée de la méthode de résolution. Rappelons que le point $P(X,Y)$ obtenu après résolution de ce système n'est pas forcément un point appartenant simultanément aux trois cercles, mais un point optimal «le plus proche possible» des trois cercles.

Supposons que X_0, Y_0 et T_0 soient des valeurs approximatives de la solution cherchée X, Y et T. De telles valeurs approchées peuvent être facilement devinées. Si $\Delta X = X - X_0$, $\Delta Y = Y - Y_0$ et $\Delta T = T - T_0$ représentent les différences entre ces valeurs initiales approximatives et les valeurs cherchées X, Y, T, et si l'on groupe ces différences dans un vecteur $\overrightarrow{\Delta u} = (\Delta X,\Delta Y,\Delta T)^T$, l'équation (5) se linéarise sous la forme :

$$\overrightarrow{f}(X_0,Y_0,T_0) + J \cdot \overrightarrow{\Delta u} + \overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{0} \tag{6}$$

Dans l'équation (6), J est la matrice jacobienne de $\overrightarrow{f}$ évaluée pour les valeurs initiales X_0, Y_0 et T_0, c'est-à-dire :

$$J = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial X} & \dfrac{\partial f_1}{\partial Y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial T} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial X} & \dfrac{\partial f_2}{\partial Y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial T} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial X} & \dfrac{\partial f_3}{\partial Y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial T} \end{pmatrix}\right|_{(X_0,Y_0,T_0)} . \tag{7}$$

Le terme $\overrightarrow{\varepsilon}$ qui apparaît dans l'équation (6) représente l'erreur de linéarisation au 2ème ordre. Celle-ci sera négligée dans la suite.

La résolution de l'équation vectorielle (6) fournit le vecteur $\overrightarrow{\Delta u} = (\Delta X,\Delta Y,\Delta T)^T$, qui permet ensuite de calculer une nouvelle approximation $X_1 = X_0 + \Delta X$, $Y_1 = Y_0 + \Delta Y$ et $T_1 = T_0 + \Delta T$ de la solution, celle-ci étant de meilleure précision que l'approximation précédente.

Pour calculer le vecteur $\overrightarrow{\Delta u}$ à partir de l'équation (6), il faudrait en principe résoudre le système d'équations linéaires

$$J \cdot \overrightarrow{\Delta u} = -\overrightarrow{f}(X_0,Y_0,T_0). \tag{8}$$

L'équation (8) représente un système de trois équations linéaires à trois inconnues facile à résoudre. Il est toutefois avantageux de pré-multiplier l'équation (8) par la matrice transposée J^T et de résoudre ensuite le système

$$J^T J \cdot \overrightarrow{\Delta u} = -J^T \overrightarrow{f}. \tag{9}$$

L'une des raisons de cette modification est la suivante : supposons qu'il y ait autour du lac un quatrième canon placé dans un quatrième port. Il est facile de deviner que la connaissance de la distance entre ce quatrième point fixe et le bateau permettrait au capitaine de déterminer sa position avec une meilleure précision. Mathématiquement, cette modification conduirait à ajouter une quatrième équation au système (5), qui possèderait alors 4 équations mais seulement 3 inconnues (système *surdimensionné*) ! Il en serait de même pour le système d'équations linéaires (8). Un tel système ne peut pas être résolu comme un système linéaire «normal», mais il peut être résolu sous la forme transformée de l'équation (9).

Finalement, c'est en exécutant quelques itérations du même processus en prenant X_1, Y_1 et T_1 comme nouvelles valeurs initiales que l'on améliore de proche en proche la précision de la solution. On obtient de cette façon les deux coordonnées X et Y du bateau, ainsi que l'erreur T de synchronisation de l'horloge du bateau par rapport aux horloges terrestres.