

Fondements mathématiques du positionnement par GPS

Pierre-André Chevalier
professeur à l'Ecole d'ingénieurs de Bienne
Haute Ecole Spécialisée du Canton de Berne
mars 2002

1 Le calcul de positionnement

1.1 Position relative d'un satellite et d'un observateur

Un observateur se trouve sur la surface de la Terre en un point Q . La position de ce point est déterminée dans un système de coordonnées orthogonal attaché à la Terre (ECEF = *Earth Centered Earth Fixed*). L'origine O de ce système est fixée au centre de la Terre. La direction de l'axe Ox est donnée par l'intersection de l'équateur terrestre et le méridien de Greenwich, l'axe Oy est dans le plan de l'équateur et orthogonal à Ox , et l'axe Oz correspond à l'axe de rotation de la Terre (figure 1).

Dans le système ECEF, la position de l'observateur est donnée par le vecteur

$$\vec{OQ} = \mathbf{r}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

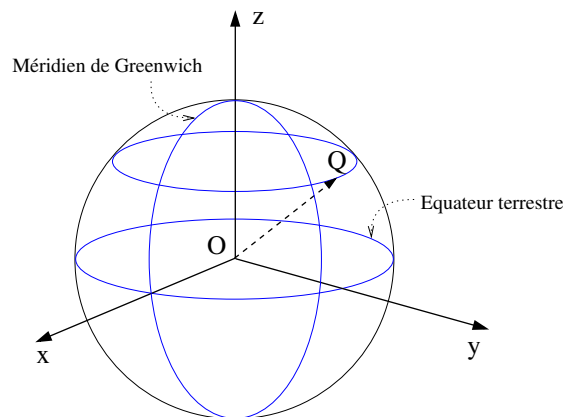


FIG. 1 – La position de l'observateur dans le système ECEF.

En même temps, un satellite S se trouve dans l'espace autour de la Terre. Son orbite décrit une ellipse presque circulaire, dont le rayon moyen est d'environ 26'000 km, soit un peu plus de quatre fois le rayon terrestre. Le tour complet de l'orbite est parcouru en 12 heures environ.

Les paramètres de l'orbite et la position du satellite, connus avec une grande précision, sont donnés

dans le système de coordonnées de Kepler (figure 2) :

- a demi-grand axe de l'orbite
- e excentricité numérique
- Ω ascension droite par rapport au point vernal
- i inclinaison de l'orbite par rapport au plan de l'équateur
- ω argument du périégée de l'orbite
- f anomalie vraie

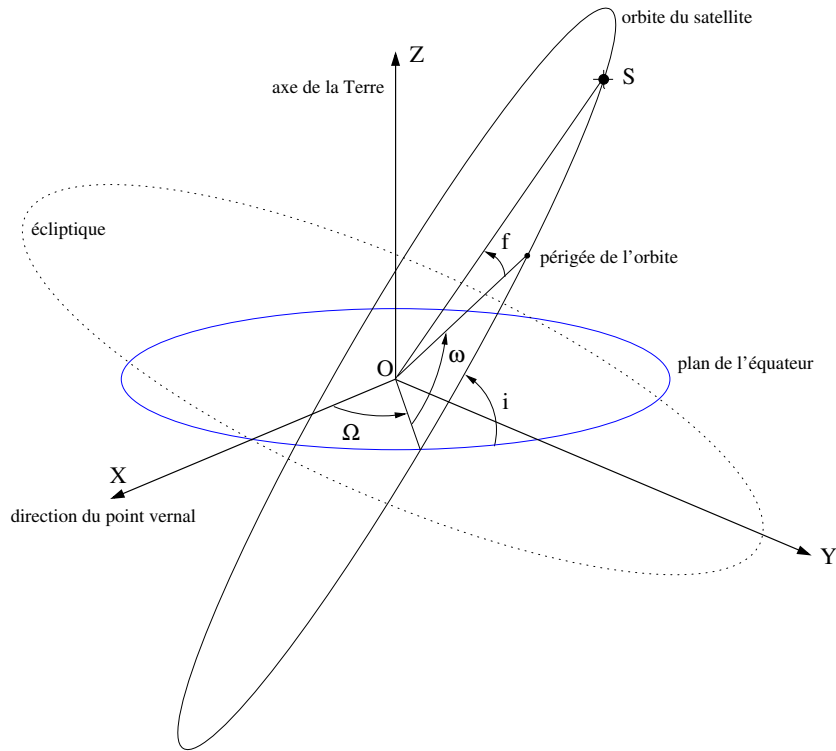


FIG. 2 – Le système de coordonnées de Kepler.

Dans le but de comparer les positions respectives du satellite et de l'observateur et de calculer la distance entre les deux, il est nécessaire de convertir la position instantanée du satellite dans le système de coordonnées ECEF. Les formules nécessaires à la transformation *Kepler* \rightarrow *ECEF* figurent en annexe. Nous supposons dès maintenant que la position du satellite, qui varie au cours du temps, est représentée dans le système ECEF par le vecteur $\vec{OS} = \vec{r}_S(t)$ (figure 3).

L'observateur reçoit au temps t un message du satellite. A cause de la distance, ce message aura été envoyé par le satellite à un instant antérieur $t - \tau$, où $\tau > 0$ représente la durée de la transmission. L'ordre de grandeur de ce délai est d'environ 60 millisecondes.

Ce message fournit sous forme codée de nombreuses informations en rapport avec le calcul de positionnement par GPS. En particulier, il contient la position exacte du satellite dans le système de coordonnées de Kepler ainsi que l'heure exacte à l'horloge du satellite au moment de l'envoi. La précision de cette horloge est de 10^{-9} seconde.

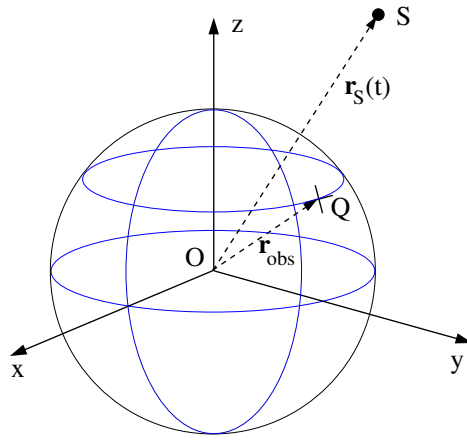


FIG. 3 – La position du satellite dans le système ECEF.

A cause de la rotation de la Terre, la position de l'observateur aura changé par rapport au satellite pendant le temps de transmission du message. Le déplacement est d'environ 30 m pour un observateur qui serait situé sur l'équateur.

Désignons par Q_0 et S_0 les positions respectives de l'observateur et du satellite au moment de l'envoi du message, et par Q_1 la position de l'observateur au moment de la réception du message (figure 4).

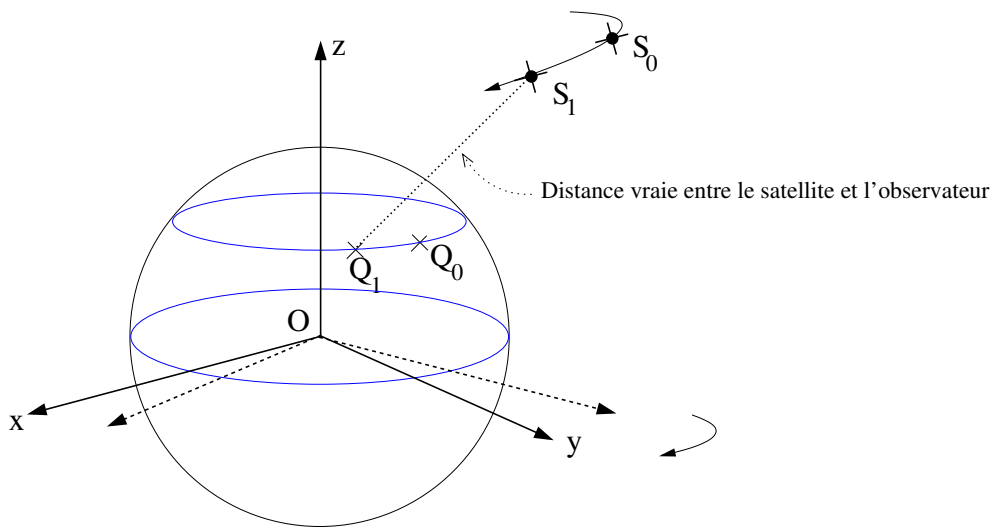


FIG. 4 – La variation de la position de l'observateur durant la transmission du message.

Pour calculer la distance entre l'observateur et le satellite, on peut transformer les coordonnées du point S_0 (telles qu'elles étaient au moment de l'envoi) comme si le système de coordonnées du satellite avait suivi la même rotation que l'observateur. Si le satellite avait aussi tourné autour de l'axe Oz durant l'intervalle de temps τ , sa position « virtuelle » S_1 serait donnée par la rotation autour de l'axe Oz du vecteur $\vec{OS}_0 = \vec{r}_S(t - \tau)$, c'est-à-dire

$$\vec{OS}_1 = R_3(\omega_e \tau) \vec{r}_S(t - \tau). \quad (1)$$

$R_3(\phi)$ est la matrice de rotation d'angle ϕ autour de l'axe Oz :

$$R_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

et ω_e représente la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

De cette manière, la distance vraie entre le satellite et l'observateur peut être exprimée par la longueur du vecteur $\vec{Q}_1 S_1$, c'est-à-dire :

$$\left\| \vec{Q}_1 S_1 \right\| = \left\| \vec{OS}_1 - \vec{OQ}_1 \right\| = \left\| R_3(\omega_e \tau) \vec{r}_S(t - \tau) - \mathbf{r}_{\text{obs}} \right\|. \quad (3)$$

1.2 Calcul de la distance entre le satellite et l'observateur

En notant par $\rho = \rho(t)$ la distance géométrique instantanée entre l'observateur et le satellite, il vient de la formule (3) que

$$\rho(t) = \left\| R_3(\omega_e \tau) \vec{r}_S(t - \tau) - \mathbf{r}_{\text{obs}} \right\|. \quad (4)$$

Si le message avait été transmis durant le temps τ dans le vide absolu, la distance ρ devrait être égale au produit $c \cdot \tau$, où c désigne la vitesse de la lumière. Dans la réalité, toutefois, la situation est plus compliquée. Pour différentes raisons, des perturbations viennent s'ajouter à cette mesure de la distance :

- l'erreur I (*délai ionosphérique*), due au freinage des ondes électromagnétiques dans les couches de l'ionosphère (entre 50 km et 1000 km d'altitude) ;
- l'erreur T (*délai troposphérique*), due au freinage des ondes électromagnétiques dans les couches de la troposphère (entre 0 et 50 km d'altitude) ;
- l'erreur Δt_S de synchronisation de l'horloge du satellite et l'erreur Δt_{obs} de l'horloge de l'observateur. Ces erreurs cumulées engendrent une erreur globale $c \cdot \Delta \tau$ sur la distance.
- une erreur systématique E ayant des causes diverses non encore mentionnées (par exemple : effets relativistes, réflexion des ondes sur des obstacles, etc).

Désignons par P la distance observable déterminée par $c \cdot \tau$, où τ est la différence entre le temps de l'envoi du message (à l'horloge du satellite) et le temps de réception du message (à l'horloge de l'observateur)¹.

En tenant compte des différentes erreurs mentionnées ci-dessus, on peut établir l'équation fondamentale pour la distance² entre le satellite et l'observateur :

$$P = \rho + I + T + c \cdot \Delta \tau + E \quad (5)$$

Pour l'observateur qui reçoit le message, la position virtuelle du satellite au temps t est donnée dans le système ECEF par

1. Cette distance est appelée (*pseudo-range*) dans la littérature spécialisée.

2. Cette équation est appelée dans la littérature «*equation for code observation*».

$$\begin{bmatrix} X_S(t) \\ Y_S(t) \\ Z_S(t) \end{bmatrix} = R_3(\omega_e \tau) \vec{r}_S(t - \tau). \quad (6)$$

La position de l'observateur est donnée par le vecteur

$$\mathbf{r}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (7)$$

de sorte que la distance géométrique $\rho(t)$ s'exprime par

$$\rho(t) = \sqrt{(X_S(t) - X)^2 + (Y_S(t) - Y)^2 + (Z_S(t) - Z)^2}. \quad (8)$$

Abandonnant la dépendance en temps de $X_S(t)$, $Y_S(t)$ et $Z_S(t)$, on peut réécrire l'équation fondamentale (5) sous la forme :

$$P = \sqrt{(X_S - X)^2 + (Y_S - Y)^2 + (Z_S - Z)^2} + I + T + c \cdot \Delta\tau + E \quad (9)$$

Cette dernière équation contient quatre inconnues : les trois coordonnées X , Y et Z de la position de l'observateur, ainsi que l'erreur de synchronisation globale $\Delta\tau$. Dans la suite, nous négligerons les termes I et T , car ce sont des erreurs systématiques qui varient peu dans un intervalle de temps suffisamment court.

La résolution de l'équation (9) s'effectue par linéarisation. A partir de valeurs initiales approximatives X_0 , Y_0 , Z_0 et $\Delta\tau_0$, on peut exprimer la pseudo-distance $P(X, Y, Z, c \cdot \Delta\tau)$ au moyen du développement linéarisé

$$P(X, Y, Z, c \cdot \Delta\tau) = P(X_0, Y_0, Z_0, c \cdot \Delta\tau_0) + J \cdot (X - X_0, Y - Y_0, Z - Z_0, c \cdot \Delta\tau - c \cdot \Delta\tau_0)^T + \varepsilon. \quad (10)$$

Dans cette formule, J représente la matrice jacobienne, qui est égale au gradient de $P(X, Y, Z, c \cdot \Delta\tau)$:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{X_S - X_0}{\sqrt{(X_0 - X_S)^2 + (Y_0 - Y_S)^2 + (Z_0 - Z_S)^2}} \\ -\frac{Y_S - Y_0}{\sqrt{(X_0 - X_S)^2 + (Y_0 - Y_S)^2 + (Z_0 - Z_S)^2}} \\ -\frac{Z_S - Z_0}{\sqrt{(X_0 - X_S)^2 + (Y_0 - Y_S)^2 + (Z_0 - Z_S)^2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{X_S - X_0}{P(X_0, Y_0, Z_0, c \Delta\tau_0)} \\ -\frac{Y_S - Y_0}{P(X_0, Y_0, Z_0, c \Delta\tau_0)} \\ -\frac{Z_S - Z_0}{P(X_0, Y_0, Z_0, c \Delta\tau_0)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Une fois développée, l'équation linéarisée (10) prend la forme

$$P(X, Y, Z, c \cdot \Delta\tau) = P(X_0, Y_0, Z_0, c \cdot \Delta\tau_0) - \frac{X_S - X_0}{P(X_0, Y_0, Z_0, c \Delta\tau_0)} \cdot (X - X_0) - \frac{Y_S - Y_0}{P(X_0, Y_0, Z_0, c \Delta\tau_0)} \cdot (Y - Y_0) - \frac{Z_S - Z_0}{P(X_0, Y_0, Z_0, c \Delta\tau_0)} \cdot (Z - Z_0) + 1 \cdot c \Delta\tau + \varepsilon. \quad (12)$$

Les notations $x = (X - X_0)$, $y = (Y - Y_0)$, $z = (Z - Z_0)$, ainsi que $P_{\text{obs}} = P(X, Y, Z, c\Delta\tau)$ et $P_0 = P(X_0, Y_0, Z_0, c\Delta\tau_0)$ permettent d'écrire l'équation (12) sous une forme simplifiée :

$$-\frac{X_S - X_0}{P_0} \cdot x - \frac{Y_S - Y_0}{P_0} \cdot y - \frac{Z_S - Z_0}{P_0} \cdot z + 1 \cdot c\Delta\tau = (P_{\text{obs}} - P_0) - \varepsilon \quad (13)$$

Dans cette équation, P_0 représente la distance observée entre le satellite et l'observateur, calculée à partir des informations sur le temps (connu) de transmission du message.

En notant encore $b = P_{\text{obs}} - P_0$ et en négligeant le terme ε d'erreur de linéarisation, l'équation fondamentale prend finalement la forme simplifiée

$$-\frac{X_S - X_0}{P_0} \cdot x - \frac{Y_S - Y_0}{P_0} \cdot y - \frac{Z_S - Z_0}{P_0} \cdot z + c \cdot \Delta\tau = b. \quad (14)$$

Les coefficients de l'équation (14) sont déterminés de la manière suivante :

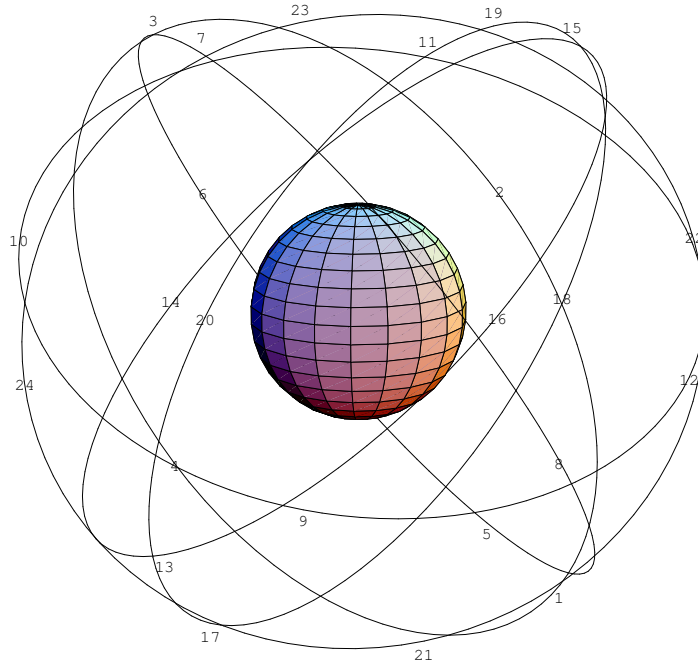
1. déterminer une position approximative X_0 , Y_0 et Z_0 de l'observateur à un moment donné, par exemple à partir d'une ancienne mesure ;
2. déterminer la position X_S , Y_S , Z_S du satellite au même moment (celle-ci est fournie dans le message qu'il a envoyé) ;
3. calculer une première estimation P_{obs} de la distance géométrique euclidienne entre l'observateur et le satellite : $P_{\text{obs}} = \sqrt{(X_S - X_0)^2 + (Y_S - Y_0)^2 + (Z_S - Z_0)^2}$;
4. calculer la distance P_0 à partir du temps de transmission du message, puis construire le membre de droite $b = P_{\text{obs}} - P_0$.

Les inconnues de l'équation (14) sont x , y , z , et $c \cdot \Delta\tau$. Si elles pouvaient être déterminées, celles-ci permettraient, grâce aux formules $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$ et $Z = Z_0 + z$, de calculer les coordonnées X , Y et Z de l'observateur.

1.3 Détermination de la position grâce à plusieurs satellites

Dans la section précédente, il a été question de la distance entre un observateur et un satellite unique. Considérons maintenant le processus de détermination de la position de l'observateur lorsque plusieurs satellites sont actifs simultanément. Nous supposons que ces satellites sont distribués plus ou moins uniformément autour de la Terre, et que chacun d'entre eux effectue de manière identique le processus décrit dans la section précédente.

FIG. 5 – Représentation schématique de la constellation de satellites.



A l'endroit où se trouve l'observateur sur la Terre, tous les satellites ne sont pas «visibles» simultanément. La plupart sont de l'autre côté de la Terre et cachés par celle-ci, mais nous admettons que $m \geq 4$ satellites sont visibles à chaque instant dans la portion du ciel au-dessus du point d'observation.

Nous numérotions les m satellites visibles au moyen de l'indice $k = 1, 2, \dots, m$.

En ajoutant simplement l'indice k correspondant au numéro du satellite, une équation similaire à l'équation (14) peut être formulée pour chacun des satellites visibles :

$$-\frac{X_S^k - X_0}{P_0^k} \cdot x - \frac{Y_S^k - Y_0}{P_0^k} \cdot y - \frac{Z_S^k - Z_0}{P_0^k} \cdot z + c \cdot \Delta\tau = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Ces m équations linéaires peuvent être rassemblées sous la forme d'un système linéaire matriciel de la forme

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (16)$$

où $\mathbf{x} = (x, y, z, c\Delta\tau)^T$ est le vecteur des inconnues, où $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ est le membre de droite, et où la matrice A est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{X_S^1 - X_0}{P_0^1} & -\frac{Y_S^1 - Y_0}{P_0^1} & -\frac{Z_S^1 - Z_0}{P_0^1} & 1 \\ -\frac{X_S^2 - X_0}{P_0^2} & -\frac{Y_S^2 - Y_0}{P_0^2} & -\frac{Z_S^2 - Z_0}{P_0^2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X_S^m - X_0}{P_0^m} & -\frac{Y_S^m - Y_0}{P_0^m} & -\frac{Z_S^m - Z_0}{P_0^m} & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Ce système linéaire possède 4 inconnues, mais il contient généralement un nombre d'équations supérieur ou égal à 4, selon le nombre de satellites visibles à cet instant.

Pour résoudre le système, c'est-à-dire pour trouver le vecteur \mathbf{x} qui satisfait «le mieux possible» l'équation (16), on utilisera la méthode des moindres carrés (*least squares procedure*). Multiplions pour cela l'équation (16) par la matrice transposée A^T :

$$A^T A \cdot \mathbf{x} = A^T \cdot \mathbf{b} \quad (18)$$

La matrice $M = A^T A$ est symétrique et définie-positve. La résolution du système (18) peut être effectuée par l'algorithme de Choleski.

Observant attentivement la matrice A , on peut remarquer que les entrées de cette matrice sont toutes, en valeurs absolues, plus petites ou égales à 1. En fait, les trois premières composantes de chaque ligne correspondent exactement au vecteur unité qui donne la direction d'un satellite. La matrice A ne dépend donc que des directions des satellites, mais pas des distances. Ceci améliore beaucoup la vitesse de convergence de l'algorithme numérique de résolution.

Une fois le système linéaire (18) résolu, les coordonnées X , Y , Z de l'observateur peuvent être corrigées, à partir des formules introduites juste avant l'équation (13), c'est-à-dire : $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, $Z = Z_0 + z$. Entre temps, de nouvelles données plus actuelles auront été envoyées par les satellites, et le processus de positionnement peut recommencer, de manière itérative.

2 Estimation de l'erreur de position

La position de l'observateur, ainsi qu'elle est calculée par le récepteur GPS, est fournie avec une précision de l'ordre de quelques mètres. Cette précision dépend d'un certain nombre de facteurs, l'un des plus significatifs étant le nombre de satellites «visibles». En outre, la configuration des satellites visibles – c'est-à-dire les positions respectives des uns par rapport aux autres – a une influence considérable sur la précision des résultats. En effet, plusieurs satellites groupés dans une même région du ciel conduisent à une précision plus faible que le même nombre de satellites judicieusement répartis sur la demi-sphère céleste au-dessus de l'observateur. Les figures 6 et 7 illustrent cette remarque.

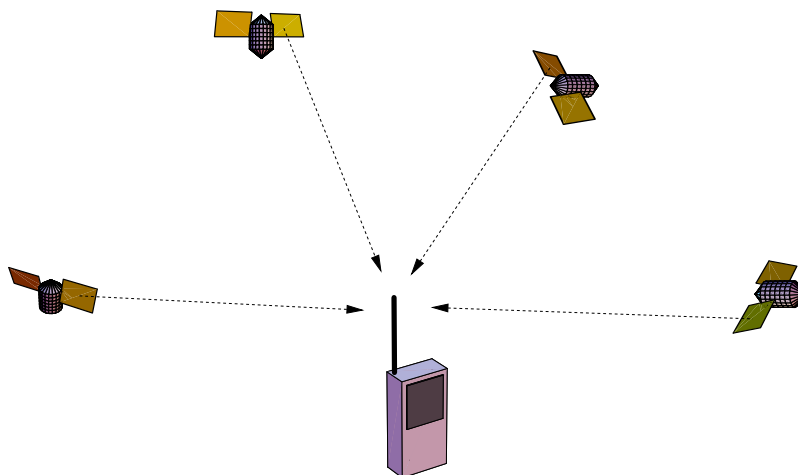


FIG. 6 – Configuration conduisant à une bonne précision (faibles valeurs DOP).

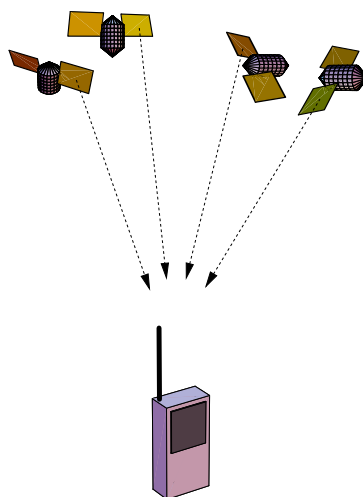


FIG. 7 – Configuration conduisant à une mauvaise précision (grandes valeurs DOP).

Dans les calculs de détermination de la position de l'observateur, le récepteur GPS tient compte des positions respectives des satellites. En particulier, il utilise en priorité les données des satellites

visibles qui permettent d'assurer un résultat de précision optimale. Pour cela, le récepteur calcule des indicateurs typiques, appelés généralement «DOP»³, qui permettent de quantifier la précision en fonction des positions relatives des satellites visibles.

La section suivante développe quelques aspects mathématiques liés au calcul des indicateurs de précision DOP.

2.1 La matrice de covariance des erreurs de position

Les indicateurs DOP sont issus de développements statistiques. Nous ferons donc une brève incursion dans ce domaine, en commençant par un petit rappel.

Soient X et Y deux variables aléatoires : la **covariance** de X et de Y est un indicateur statistique permettant d'estimer le degré de dépendance des deux variables aléatoires. En particulier, la covariance de X et Y est égale à zéro si les deux variables aléatoires X et Y sont totalement indépendantes l'une de l'autre.

Si $E(\cdot)$ dénote l'espérance mathématique d'une v.a.⁴, on définit la covariance de X et de Y au moyen de la formule

$$\text{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] \quad (19)$$

où $\mu_1 = E[X]$ et $\mu_2 = E[Y]$. Nous utiliserons dans la suite la notation raccourcie $\sigma_{X,Y}$ pour la covariance $\text{Cov}(X,Y)$.

Rappelons que la covariance de X avec X est égale à la variance de X , c'est-à-dire :

$$\sigma_{X,X} = E[(X - \mu_1)^2] = E[X^2] - \mu^2 = \text{Var}(X) = \sigma_X^2.$$

La **matrice de covariance** de n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n est la matrice carrée qui contient les covariances de tous les couples possibles de variables aléatoires :

$$\text{Cov}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \left(\sigma_{X_i, X_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (20)$$

Pour fixer les idées, supposons qu'il y a 4 satellites «visibles» dans le ciel au-dessus de l'observateur, et considérons quatre variables aléatoires b_1, b_2, b_3 et b_4 relatives à ces satellites. Nous définirons la variable aléatoire b_i comme la différence entre deux mesures de la distance entre l'observateur et le satellite No i , l'une étant la distance géométrique euclidienne P_{obs}^i , et l'autre la distance observée P_0^i calculée grâce au temps de parcours du message (voir les quelques lignes qui précèdent la formule (14)) :

$$b_i = P_{obs}^i - P_0^i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (21)$$

En admettant l'hypothèse réaliste que les erreurs b_i sont indépendantes les unes des autres, la matrice de covariance des variables aléatoires b_i est diagonale :

$$\text{Cov}(b_1, \dots, b_4) = \begin{pmatrix} \sigma_{b_1, b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{b_2, b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{b_3, b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{b_4, b_4} \end{pmatrix} \quad (22)$$

3. DOP : Dilution of Precision

4. v.a. est mis pour «variable aléatoire».

De plus, il est raisonnable d'admettre que les espérances mathématiques des variables aléatoires b_i sont nulles, et que leurs variances respectives sont identiques. On a donc, pour $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}\mu_i &= E[b_i] = 0, \\ \sigma_{b_i, b_i} &= \sigma_i^2 = \sigma^2.\end{aligned}$$

Grâce à ces hypothèses et à l'équation (20), la matrice de covariance de b_1, b_2, b_3 et b_4 peut s'écrire de manière encore plus simple :

$$\text{Cov}(b_1, \dots, b_4) = (E[b_i \cdot b_j])_{1 \leq i, j \leq 4} = E[\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T] = \sigma^2 I. \quad (23)$$

Dans la formule (23), I représente la matrice identité de dimension 4 et σ^2 la variance des variables aléatoires b_i . Cette variance peut être calculée explicitement à partir des données.

Revenons maintenant au problème original, c'est-à-dire de déterminer avec précision la position de l'observateur. La résolution de l'équation (18) fournit le vecteur

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}. \quad (24)$$

Les trois premières composantes de ce vecteur déterminent les corrections x, y, z qu'il faut apporter aux coordonnées initiales X_0, Y_0 et Z_0 de l'observateur pour améliorer leur précision, et la quatrième composante contient l'erreur $c\Delta\tau$ sur le temps.

D'un point de vue statistique, les variances de ces différentes corrections peuvent fournir des indications intéressantes sur la précision de la position de l'observateur. Dans ce but, considérons à leur tour x, y, z et $c\Delta\tau$ comme des variables aléatoires, et calculons la matrice de covariance correspondante :

$$\text{Cov}(x, y, z, c\Delta\tau) = \begin{pmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} & \sigma_{x,c\Delta\tau} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} & \sigma_{y,c\Delta\tau} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} & \sigma_{z,c\Delta\tau} \\ \sigma_{c\Delta\tau,x} & \sigma_{c\Delta\tau,y} & \sigma_{c\Delta\tau,z} & \sigma_{c\Delta\tau,c\Delta\tau} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Le calcul explicite de cette matrice suit après quelques développements, basés sur les propriétés de la covariance et l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x, y, z, c\Delta\tau) &= E[\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T] = E\left[(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \cdot \left((A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}\right)^T\right] \\ &= E\left[(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \cdot (A^T \mathbf{b})^T (A^T A)^{-1}\right] \\ &= E\left[(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T A (A^T A)^{-1}\right] \\ &= (A^T A)^{-1} A^T E[\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T] A (A^T A)^{-1}\end{aligned} \quad (26)$$

En utilisant dans ce développement la formule (23), on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(x,y,z,c\Delta\tau) &= (A^T A)^{-1} A^T \cdot (\sigma^2 I) \cdot A (A^T A)^{-1} \\
&= \sigma^2 (A^T A)^{-1} (A^T A) (A^T A)^{-1} \\
&= \sigma^2 (A^T A)^{-1}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Ce dernier développement montre que la matrice de covariance des variables aléatoires x, y, z et $c\Delta\tau$ est facile à obtenir par calcul : la variance σ^2 ainsi que la matrice A (17) peuvent être calculées explicitement à partir des données. Les composantes de la matrice de covariance $\text{Cov}(x,y,z,c\Delta\tau)$ fournissent les covariances des erreurs relativement au système de coordonnées X, Y, Z , et relativement au temps. En particulier, les composantes de la diagonale principale de cette matrice correspondent aux variances respectives des erreurs x, y, z et $c\Delta\tau$.

2.2 Le système de coordonnées locales

Les erreurs x, y et z mentionnées ci-dessus correspondent aux erreurs sur les coordonnées de position de l'observateur dans le système de coordonnées géocentriques ECEF. Ce système de coordonnées X, Y et Z a son origine au centre de la Terre, et il tourne avec elle. Du point de vue de l'utilisateur, les coordonnées de position n'ont malheureusement pas beaucoup d'intérêt dans ce système. Pour rendre les coordonnées de position utilisables sur le terrain, le récepteur GPS doit encore convertir la position de l'observateur dans un système de coordonnées terrestres plus habituel. Un système approprié est le système E, N, U (*East, North, Up*) qui correspond à la latitude, à la longitude géographique et à l'altitude au-dessus du niveau de la mer.

La conversion des coordonnées de position entre le système ECEF (coordonnées X, Y, Z) et le système ENU (latitude ϕ , longitude λ et altitude h) est un peu compliquée par le fait que la Terre n'est pas une sphère mais qu'elle ressemble plus ou moins à un ellipsoïde de révolution. Il est nécessaire d'introduire ici deux grandeurs intermédiaires f et N , qui ne servent que pour les calculs de conversion.

Considérons l'ellipse de demi-grands axes a et b , $a > b$, qui par rotation engendre l'ellipsoïde terrestre. On définit l'*aplatissement* f de cette ellipse par la formule

$$f = \frac{a - b}{a}. \tag{28}$$

Les paramètres a et f varient légèrement selon les régions du monde. Le système géodésique WGS 84 définit ces paramètres de manière précise pour chaque région, et les valeurs les plus couramment utilisées sont généralement stockées dans les mémoires électroniques des récepteurs GPS.

D'autre part, on peut calculer pour un point du globe de latitude ϕ la grandeur intermédiaire N selon la formule

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - f(2 - f) \sin^2 \phi}}.$$

Géométriquement, la grandeur N détermine la distance mesurée le long de la droite localement perpendiculaire à l'ellipsoïde entre le point d'observation P et l'intersection de cette droite avec l'axe polaire de la Terre. Sur la figure 8, le point Q correspond au point de cette droite qui se trouverait à l'altitude zéro (c'est-à-dire sur l'ellipsoïde de référence).

Avec les notations introduites, les formules de conversion entre les coordonnées locales ϕ, λ et h et les coordonnées ECEF X, Y, Z sont données par les formules suivantes :

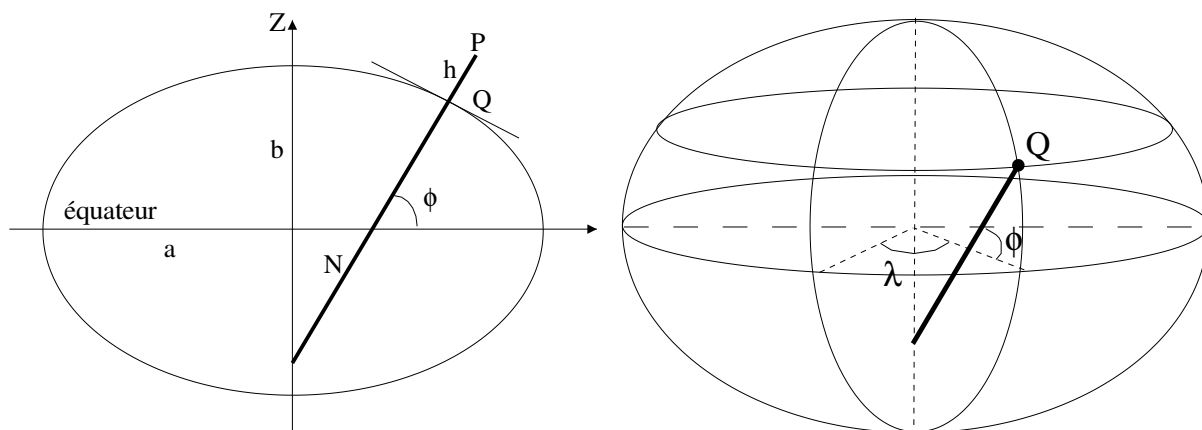


FIG. 8 – Coordonnées locales sur un ellipsoïde.

$$\begin{aligned}
 X &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\
 Y &= (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\
 Z &= [(1 - f)^2 N + h] \sin \phi
 \end{aligned} \tag{29}$$

Dans les calculs de position du GPS, ce ne sont pas précisément les formules (29) qui sont utilisées, mais plutôt les inverses de ces formules, c'est-à-dire : exprimer les coordonnées locales ϕ , λ et h à partir des coordonnées ECEF X , Y , Z . Ces formules inverses sont données par les transformations suivantes :

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{30}$$

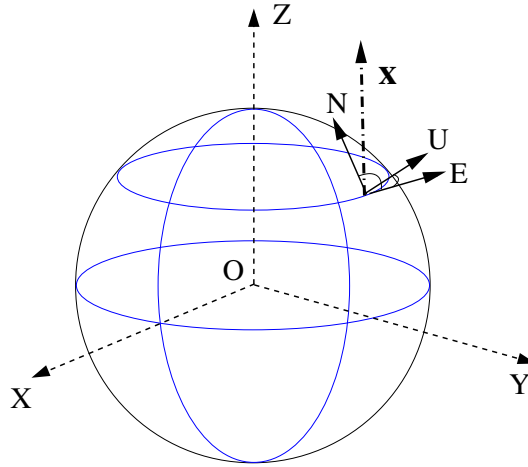
$$\phi = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 - \frac{(2 - f)fN}{N + h}\right)^{-1}\right) \tag{31}$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \phi} - N \tag{32}$$

Il apparaît clairement que les formules (31) et (32) permettant de calculer la latitude ϕ et l'altitude h sont couplées. Il faut donc recourir à un processus itératif pour résoudre ces équations : à partir d'une première estimation de h , on calcule une estimation de ϕ au moyen de la formule (31). Ensuite, on calcule grâce à la formule (32) une nouvelle estimation de h , meilleure que la première, et ainsi de suite. Pour $h \ll N$, la convergence de ce processus itératif est très rapide.

2.3 Les indicateurs de précision

Revenons à l'estimation de l'erreur de positionnement. Nous avons calculé plus haut le vecteur d'erreurs $\mathbf{x} = (x, y, z, c\Delta\tau)^T$, ainsi que la matrice de covariance (27) associée à ces erreurs. Les coordonnées x , y et z de ce vecteur sont exprimées dans le système ECEF. Comme il a déjà été mentionné plus haut, il est plus instructif pour l'observateur qui utilise le GPS de disposer des coordonnées de position et de l'estimation de l'erreur de position dans le système de coordonnées locales, c'est-à-dire selon les directions E, N et U (*East, North, Up*) (figure 9)



XYZ : Système de coordonnées ECEF
 ENU : Système de coordonnées locales
 \mathbf{x} : vecteur d'erreur de position

FIG. 9 – L'erreur dans le système de coordonnées locales.

L'opération qui permet de transformer un vecteur du système ECEF dans le système local est un changement de base. Si $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ est le vecteur d'erreur dans le système ECEF, le vecteur correspondant $\mathbf{x}_L = (x_L, y_L, z_L)$ exprimé dans le système de coordonnées locales est donné par le produit

$$\mathbf{x}_L = F^T \mathbf{x}, \quad (33)$$

où F est la matrice de transformation

$$F = \begin{bmatrix} -\cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & -\cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

De manière analogue, il est instructif d'exprimer aussi la matrice de covariance (25) dans le système de coordonnées locales. La nouvelle matrice de covariance $\text{Cov}(x_L, y_L, z_L)$ s'obtient alors selon les développements suivants, justifiés par les propriétés de l'espérance mathématique $E[\cdot]$ et des produits matriciels :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_L, y_L, z_L) &= \begin{bmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{E,N} & \sigma_{E,U} \\ \sigma_{N,E} & \sigma_N^2 & \sigma_{N,U} \\ \sigma_{U,E} & \sigma_{U,N} & \sigma_U^2 \end{bmatrix} \\ &= E \left[\mathbf{x}_L \cdot \mathbf{x}_L^T \right] \\ &= E \left[F^T \mathbf{x} \cdot (F^T \mathbf{x})^T \right] \\ &= E \left[F^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T F \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F^T E [\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T] F \\
&= F^T \text{Cov}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T) F \\
&= F^T \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_y^2 & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} F
\end{aligned} \tag{35}$$

La matrice de covariance de dimension 3×3 qui apparaît dans l'équation (35) est en fait une sous-matrice de la matrice de covariance $\text{Cov}(x,y,z,c\Delta\tau)$ donnée dans la formule (25). La diagonale principale de la matrice de covariance $\text{Cov}(x_L,y_L,z_L)$ contient les variances respectives des erreurs relatives aux trois axes de coordonnées E, N et U du système local. Ces variances ne signifient pas grand chose en elles-mêmes, mais elle peuvent être comparées à la variance σ^2 de l'erreur globale de position \mathbf{b} . Elles fournissent de cette manière des indicateurs instructifs et fiables sur la qualité de la précision de la position calculée par le GPS : les indicateurs «DOP» (*Dilution Of Precision*).

$$\begin{aligned}
\text{GDOP} &= \frac{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2 + \sigma_{c\Delta\tau}^2}}{\sigma} & : \text{ Dilution de précision géométrique} \\
\text{PDOP} &= \frac{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2}}{\sigma} & : \text{ Dilution de précision de position} \\
\text{HDOP} &= \frac{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2}}{\sigma} & : \text{ Dilution de précision horizontale} \\
\text{VDOP} &= \frac{\sigma_U}{\sigma} & : \text{ Dilution de précision verticale} \\
\text{TDOP} &= \frac{\sigma_{c\Delta\tau}}{\sigma} & : \text{ Dilution de précision du temps}
\end{aligned} \tag{36}$$

Ces indicateurs permettent de savoir, pour une configuration donnée des satellites visibles, comment l'erreur globale de détermination de la position se distribue selon les directions du système de coordonnées locales, c'est-à-dire, que ce soit horizontalement (N ou E), verticalement (U), ou les deux à la fois, ou encore selon la mesure du temps.

Au sujet de l'indicateur GDOP, il est intéressant de remarquer que celui-ci peut se calculer directement à partir de la matrice de covariance (25) dans le système ECEF, sans passer par le système de coordonnées locales. On a la formule :

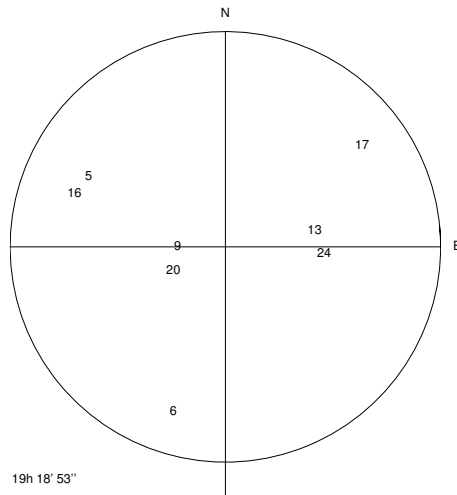
$$\text{GDOP} = \sqrt{\frac{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2 + \sigma_{c\Delta\tau}^2}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\text{Tr}[\text{Cov}(x,y,z,c\Delta\tau)]}{\sigma}},$$

où $\text{Tr}[\cdot]$ représente la trace de la matrice.

Nous allons maintenant montrer trois exemples qui illustrent la signification des indicateurs DOP. Ces exemples ne sont pas directement issus des données GPS réelles, mais ils proviennent d'une simulation (simplifiée) du calcul de position GPS, effectuée par un programme informatique.

La figure (10) représente la position des satellites visibles à 19h 18' et 53" par un observateur situé à une certaine position géographique λ , ϕ et h . Dans cette figure, le grand cercle représente la ligne d'horizon, le croisement des deux axes N et E correspond au zénith. Les satellites visibles à cet instant ont les numéros respectifs 5, 6, 9, 16, 17, 20 et 24. Chacun d'entre eux envoie au récepteur GPS des

FIG. 10 – Exemple simulé No 1 de configuration de satellites :

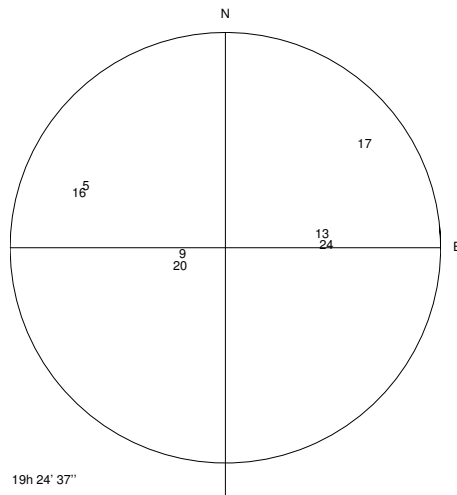


GDOP = 1.4527
 PDOP = 1.3417
 HDOP = 0.9570
 VDOP = 0.9404

informations sur sa propre position actuelle, à partir desquelles le récepteur peut calculer sa position exacte avec plus ou moins de précision.

Les nombres affichés sur la droite de la figure sont les valeurs calculées des indicateurs DOP pour la configuration correspondante. On s'aperçoit que ces valeurs numériques calculées sont plus ou moins proches de 1. Cela est le cas lorsque les différents satellites visibles à l'instant correspondant et au point d'observation donné sont «assez bien distribués», c'est-à-dire ils sont suffisamment bien dispersés dans la portion du ciel visible à cet endroit.

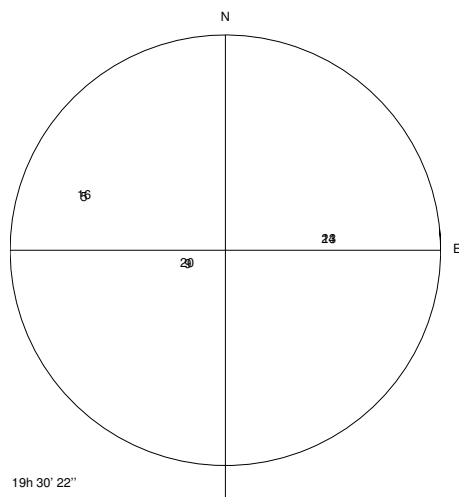
FIG. 11 – Exemple simulé No 2 de configuration de satellites :



GDOP = 11.2920
 PDOP = 10.3350
 HDOP = 8.4617
 VDOP = 5.9338

La figure (11) montre la situation 6 minutes plus tard (à 19h 24' 37"), lorsque la configuration de satellites est moins bien répartie dans la portion visible du ciel. En effet, plusieurs couples de satellites sont à cet instant relativement proches l'un de l'autre, et les informations que ceux-ci envoient au récepteur GPS sont redondantes. Il y a donc, à cet instant et à ce point d'observation, une diminution de la quantité d'informations utilisables, ce qui entraîne une baisse de précision dans la détermination de la position, et donc une augmentation des indicateurs DOP.

FIG. 12 – Exemple simulé No 3 de configuration de satellites :



$$\text{GDOP} = 170.0500$$

$$\text{PDOP} = 156.4500$$

$$\text{HDOP} = 130.4800$$

$$\text{VDOP} = 86.3220$$

Dans la figure (12), la situation calculée 6 minutes plus tard (à 19h 30' 22") est encore plus typique. Il y a à ce moment 6 satellites dans le ciel au-dessus de l'observateur, mais ceux-ci sont placés deux à deux à des positions presque identiques pour l'observateur. De ce fait, le récepteur GPS reçoit des informations très redondantes, et il se comporte comme si il n'y avait en réalité que trois satellites visibles à ce moment. La précision du calcul de position est donc très mauvaise dans une telle situation, ce qui peut s'observer dans les valeurs grandes des indicateurs DOP.

3 Annexe A.

Conversion des coordonnées entre le système de Kepler et les système ECEF

Les informations concernant la position instantanée de chacun des satellites sont incluses dans les messages que ceux-ci envoient au récepteur GPS (ce sont les *éphémérides* des satellites). Ces coordonnées de position sont données dans le système de Kepler, et le récepteur effectue la conversion dans le système ECEF. L'algorithme de transformation est décrit ci-dessous.

Une éphéméride est prévue pour être utilisée à partir d'une époque de référence t_{0e} donnée. Pour garantir toute la précision nécessaire, les données de l'éphéméride sont valables pour une durée de quelques heures, après quoi elles doivent être réactualisées.

L'éphéméride d'un satellite contient les données suivantes :

t_{0e}	temps de référence de l'éphéméride
t_S	temps exact à l'horloge du satellite
μ_0	anomalie moyenne du point de l'ellipse correspondant au temps de référence t_{0e}
Δn	correction de la vitesse angulaire moyenne de rotation
e	excentricité de l'orbite
\sqrt{a}	racine carrée du demi grand-axe de l'ellipse
Ω_0	ascension droite de l'orbite au temps de référence
$\dot{\Omega}$	taux de variation de l'ascension droite
i_0	inclinaison de l'orbite au temps de référence
\dot{i}	taux de variation de l'inclinaison
ω	argument du périhélie de l'ellipse

En plus de ces données principales, l'éphéméride contient aussi un certain nombre de coefficients de correction, qui permettent de corriger les erreurs dues aux variations du champ magnétique terrestre, à l'attraction de la Lune et du Soleil, à la pression du Soleil, etc. :

$C_{\omega c}$	$C_{\omega s}$	coefficients de correction de l'argument du périhélie
C_{rc}	C_{rs}	coefficients de correction du rayon de l'orbite
C_{ic}	C_{is}	coefficients de correction de l'inclinaison de l'orbite

Le calcul de la position du satellite s'effectue de la manière suivante :

1.	temps passé depuis le temps de référence :	$t = t_S - t_{0e}$
2.	anomalie moyenne au temps t :	$\mu = \mu_0 + \left(\sqrt{\frac{GM}{a^3}} + \Delta n \right) t$ $(GM = 3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2)$
3.	anomalie excentrique :	$E = \mu + e \sin E$ (résolution de l'équation de Kepler par une méthode itérative)
4.	anomalie vraie :	$f = \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e} \right)$
5.	longitude du noeud ascendant :	$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e) t - \omega_e t_{0e}$ $(\omega_e : \text{vitesse angulaire de rotation de la Terre} = 7.292115147 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s})$
6.	argument corrigé du périhélie :	$\omega_c = \omega + f + C_{\omega c} \cos 2(\omega + f) + C_{\omega s} \sin 2(\omega + f)$
7.	distance radiale corrigée :	$r = a(1 - e \cos E) + C_{rc} \cos 2(\omega + f) + C_{rs} \sin 2(\omega + f)$
8.	inclinaison corrigée :	$i = i_0 + \dot{i} \cdot t + C_{ic} \cos 2(\omega + f) + C_{is} \sin 2(\omega + f)$
9.	coordonnées ECEF du satellite :	$X_S = r \cos \omega_c \cos \Omega - r \sin \omega_c \cos i \sin \Omega$ $Y_S = r \cos \omega_c \sin \Omega - r \sin \omega_c \cos i \cos \Omega$ $Z_S = r \sin \omega_c \sin i$

4 Annexe B.

TAB. 1 – *Données géodésiques caractéristiques (WGS84) :*

Vitesse de la lumière	$c = 2.99792458 \cdot 10^8$ [m/s]
Rayon équatorial de la Terre	$a = 6.378137 \cdot 10^6$ [m]
Aplatissement de la Terre	$f = 1/298.257223563$
Excentricité numérique	$\varepsilon = 0.006694379990197$
Vitesse angulaire de rotation de la Terre	$\omega = 7.292115147 \times 10^{-5}$ [rad/s]

TAB. 2 – *Précision relative de différents types d'horloges :*

Type d'horloge	précision relative
montre de poignet à quartz	10^{-6}
récepteur GPS	$10^{-5} - 10^{-7}$
horloge de satellite GPS	10^{-9}
césium	$10^{-12} - 10^{-13}$
maser hydrogène	$10^{-15} - 10^{-16}$

TAB. 3 – *Répartition des erreurs dans la détermination de la position :*

Cause de l'erreur	précision relative
Données des éphémérides	2 m
Horloge des satellites	2 m
Erreur due à la traversée de la ionosphère	4 m
Erreur due à la traversée de la troposphère	0.5 - 1 m
Multipath (réflexion du signal sur des obstacles)	0 - 2 m
UERE*	5 m

(*) UERE = "User Equivalent Range Error"

Extrait d'un almanach

Un almanach des satellites GPS contient des données de l'orbite et de la position des satellites, correspondant ici aux satellites PRN-01 et PRN-02. Ces données sont mises à jour chaque semaine et sont publiées sur Internet⁵ :

```
***** Week 121 almanac for PRN-01 *****
ID:                                01
Health:                             000
Eccentricity:                       0.5200386047E-002
Time of Applicability(s):           61440.0000
Orbital Inclination(rad):            0.9673390706
Rate of Right Ascen(r/s):           -0.7588887536E-008
SQRT(A) (m 1/2):                     5153.674316
Right Ascen at Week(rad):            0.7924119310E-001
Argument of Perigee(rad):           -1.736871094
Mean Anom(rad):                      -0.2029831838E+001
Af0(s):                              0.2079010010E-003
Af1(s/s):                            0.0000000000E+000
week:                                121
***** Week 121 almanac for PRN-02 *****
ID:                                02
Health:                             000
Eccentricity:                       0.2202987671E-001
Time of Applicability(s):           61440.0000
Orbital Inclination(rad):            0.9323331497
Rate of Right Ascen(r/s):           -0.8217485148E-008
SQRT(A) (m 1/2):                     5151.892090
Right Ascen at Week(rad):            0.2071884858E+001
Argument of Perigee(rad):           -1.988380277
Mean Anom(rad):                      0.1848168591E+001
Af0(s):                              -0.1220703125E-003
Af1(s/s):                            -0.7275957614E-011
week:                                121
***** Week 121 almanac for PRN-03 *****
[...]
```

5. ftp://sirius.chinalake.navy.mil/pub/nawc/local_almanac/almanac.dat